

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α ΚΑΙ Β ΒΑΘΜΟΥ

1) Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - 2x^2 = 9x - 18$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 &= 9x - 18 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 9x + 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x-2) - 9(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-9)(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-3 \text{ ή } x=2\end{aligned}$$

Όταν έχω γινόμενο 2 ή και περισσότερων αριθμών ίσο με το μηδέν ($\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \dots = 0$) τότε θα είναι :
 $\alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$ ή

2) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{5x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+1}$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}\frac{5x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} &= \frac{3}{x+1}, \quad x \neq 1, x \neq -1 \\ \frac{5x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} &= \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow 5x-1-2(x+1) = 3(x-1) \Leftrightarrow 5x-1-2x-2 = 3x-3 \\ 5x-5x &= -3+3 \Leftrightarrow 0x=0 \text{ Αόριστη αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}\end{aligned}$$

Πρώτα παίρνω περιορισμούς
(όταν έχω κλάσματα ή ρίζες)

3) Να βρείτε τις τιμές του y ώστε η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = y$ με άγνωστο τον x να έχει λύση.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x-2} &= y \quad (x \neq 2, \text{ ορίζεται σε όλο το } \mathbb{R} - \{2\}) \\ \Leftrightarrow x-1 &= y(x-2) \\ \Leftrightarrow x-1-y(x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-y)x &= 1-2y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1-2y}{1-y}, \quad y \neq 1 \quad (\text{Διότι για } y=1 \text{ αδύνατη})\end{aligned}$$

4) Να λυθεί η εξίσωση: $|3x - 1| = |x - 5|$ (με δύο τρόπους)

ΛΥΣΗ

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ (Υψώνω εις το τετράγωνο):

$$|3x - 1| = |x - 5|$$

$$\Leftrightarrow |3x - 1|^2 = |x - 5|^2 \quad \leftarrow \text{—————} \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)^2 = (x - 5)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$9x^2 - x^2 - 6x + 10x + 1 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Όταν υψώνω εις το τετράγωνο μια απόλυτη τιμή τότε φεύγει η απόλυτη τιμή και μπαίνει μια παρένθεση στην θέση της.

2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ (Παίρνω 2 περιπτώσεις):

$$|3x - 1| = |x - 5|$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = x - 5 \quad \text{ή} \quad 3x - 1 = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = 1 - 5 \quad \text{ή} \quad 3x + x = 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -4 \quad \text{ή} \quad 4x = 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{6}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{3}{2}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|x| = |a| \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ή} \\ x = -a \end{cases}$$

5) Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 1|$

ΛΥΣΗ

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = |x - 1| \quad \leftarrow \text{—————} \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - 3| = |x - 1|$$

$$\Leftrightarrow (x-3) = (x-1) \quad \text{ή} \quad (x-3) = -(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x - x = 3 - 1 \quad \text{ή} \quad x - 3 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow 0x = 2 \quad \text{ή} \quad 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Όταν διώχνω την ρίζα τότε το υπόριζο το βάζω πάντα σε απόλυτο.

6) Να επιλυθεί η εξίσωση : $|3|x|-2|=2$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 |3|x|-2| &= 2 \\
 \Leftrightarrow 3|x|-2 &= 2 \quad \text{ή} \quad 3|x|-2 = -2 \\
 \Leftrightarrow 3|x| &= 4 \quad \text{ή} \quad 3|x| = 0 \\
 \Leftrightarrow |x| &= \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad |x| = 0 \\
 \Leftrightarrow x &= \pm \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad x = 0
 \end{aligned}$$

Πρώτα διώχνω το πρώτο απόλυτο και μετά το δεύτερο πέρνωντας περιπτώσεις.

7) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^3 - 24 = 0$ ii) $x^5 + 64 = 0$ iii) $x^6 - 64 = 0$ iv) $x^{10} + 8 = 0$

ΛΥΣΗ

i) $x^3 - 24 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 24 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{24}$

ii) $x^5 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -64 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{64} \Leftrightarrow x = -2\sqrt[5]{2}$

iii) $x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = \pm 2$

iv) $x^{10} + 8 = 0 \Leftrightarrow x^{10} = -8$ **Αδύνατη** (Επειδή ξέρουμε πως δεν υπάρχει ρίζα με αρνητικό υπόριζο)

Όταν έχω άρτια ρίζα τότε παίρνω 2 λύσεις μια θετική και μια αρνητική \pm

8) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $|x-2| + |x^2 - x - 6| = 0$ & β. $\frac{2x^2 + x - 1}{9x^2 + 36x + 13} = 0$

ΛΥΣΗ

α.

$|x-2| + |x^2 - x - 6| = 0$ Όταν έχω άθροισμα 2 θετικών αριθμών τότε πρέπει και οι δύο ταυτόχρονα να είναι ίσοι με το μηδέν ώστε το άθροισμα τους να είναι και αυτό μηδέν δηλαδή: $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ και $x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = +2$ και $(-2)^2 - 2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ και $0 = 0$

β.

$$\frac{2x^2 + x - 1}{9x^2 + 36x + 13} = 0 \quad \text{Περιορισμός} \Rightarrow 9x^2 + 36x + 13 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{-6 \pm \sqrt{23}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2 \cdot 2}, x_2 = \frac{-1 - 3}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1$$

Δεκτές, διότι ο παρανομαστής έχει $\Delta = 36^2 - 4 \cdot 9 \cdot 13 = 36 \cdot (36 - 13) = 36 \cdot 23 = 828 > 0$

$$\text{και ρίζες: } \rho_1 = \frac{-36 + 6\sqrt{23}}{2 \cdot 9} = \frac{-36 + 6\sqrt{23}}{18} = \frac{-6 + \sqrt{23}}{3}$$

$$\rho_2 = \frac{-36 - 6\sqrt{23}}{2 \cdot 9} = \frac{-36 - 6\sqrt{23}}{18} = \frac{-6 - \sqrt{23}}{3}$$

Όταν έχω ένα κλάσμα ίσο με το μηδέν αυτό σημαίνει ότι μόνο ο αριθμητής είναι μηδέν.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\kappa - 6)x^2 - 3\kappa x + 8$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Για ποια τιμή του πραγματικού κ , η εξίσωση έχει μία μόνο λύση;

β. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του κ διάφορη του 6 η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.

γ. Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία η $f(x) = 0$:

i. Έχει αντίθετες ρίζες \Leftrightarrow **Άθροισμα ίσο με μηδέν (S=0)**

ii. Έχει αντίστροφες ρίζες \Leftrightarrow **Γινόμενο ίσο με ένα (P=1)**

δ. Αν $\kappa = 1$ να βρείτε τις τιμές του για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

$f(x) = (\kappa - 6)x^2 + 3\kappa x + 8$, $\kappa \in \mathbb{R}$ πολυωνυμική άρα πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$

α) Αν $\kappa = 6$ τότε $f(x) = 0x^2 + 3 \cdot 6 \cdot x + 8 = 18x + 8$ με μοναδική ρίζα $\rho = -\frac{4}{9}$

αφού $f(x) = 0 \Leftrightarrow 18x + 8 = 0 \Leftrightarrow 18x = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{18} = -\frac{4}{9}$

β) Αν $\kappa \neq 6$ τότε $f(x) = (\kappa - 6)x^2 - 3\kappa x + 8$ με $\Delta = 9\kappa^2 - 32(\kappa - 6) = 9\kappa^2 - 32\kappa + 16 \cdot 12 = 9\kappa^2 - 32\kappa + 192$

(Διακρίνουσα της διακρίνουσας) με $\Delta' = 16^2 - 9 \cdot 16 \cdot 12 = 16 \cdot (16 - 108) = -1472 < 0$

Επομένως, η αρχική **διακρίνουσα - τριώνυμο** θα έχει ίδιο πρόσημο με το a δηλ. με το $+9$

Συνεπώς, αφού $\Delta > 0$ η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει δύο άνισες ρίζες

γ. i) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες όταν $s = -\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$$\text{Πέρνω : } -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\kappa}{\kappa - 6} = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$$

ii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες αντίστροφες όταν $p = -\frac{\gamma}{\alpha} = 1$

$$\text{Πέρνω : } -\frac{\gamma}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{\kappa - 6} = 1 \Leftrightarrow \kappa = 14$$

δ. για $\kappa = 1$ $f(x) = -5x^2 + 3x + 8$ με

$$\rho_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-5) \cdot 8}}{-10} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{-10} = \frac{-3 \pm 13}{-10} = \frac{3 \pm 13}{10} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = -1 \\ \rho_2 = +\frac{8}{5} \end{cases}$$

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 3x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq \frac{8}{5}$ (Πρόσημο ομόσημο του a δηλ. του -5 εκτός των ριζών)

10) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει πάντα πραγματικές ρίζες.

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) :

i. Έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες;

ii. Μία διπλή ρίζα;

γ. Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης να είναι διπλάσια από την άλλη.

δ. Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε οι ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης να ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 + x_2.$$

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές όταν $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0 \text{ επομένως η εξίσωση } x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

β.

i) Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\Delta > 0$

$$\Delta = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0 \quad \Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$$

ii) Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες ίσες όταν $\Delta = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ. Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 = 2\rho_2$ όταν

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 3\rho_2 = \lambda \\ \rho_1 \cdot \rho_2 = 2\rho_2^2 = \lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 3\rho_2 = \lambda \\ \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{2\lambda^2}{9} = \lambda - 1 \end{cases} \quad \frac{2\lambda^2}{9} = \lambda - 1 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \text{ και } \lambda_2 = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\delta. \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2)^2}{x_1 + x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x_1x_2}{x_1 + x_2} > 0 \quad \lambda \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\lambda + 2}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1) \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$$

λ (τιμές)	$-\infty$	0	+1	$+\infty$
λ	-		+	+
$(\lambda - 1)$	-		-	+
$(\lambda - 1) \cdot \lambda$	Θετικό		Αρνητικό	Θετικό

11) Έστω η εξίσωση $x^2 - x - 3 = 0$ (1).

α. Να αποδείξετε ότι η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της (1). Χωρίς να υπολογισθούν να υπολογισθούν οι τιμές των:

i. $x_1 + x_2$, ii. $x_1 \cdot x_2$, iii. $x_1^2 + x_2^2$, iv. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

γ. Να αποδείξετε ότι η (1) έχει ρίζες ετερόσημες.

δ. Να βρεθεί η δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τις $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1).

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση $x^2 - x - 3 = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες διότι η διακρίνουσα είναι θετική

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$$

$$\beta. \text{ i) } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$\text{ii) } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\text{iii) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1 + 2 \cdot (-3) = 7$$

$$\text{iv) } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

$$\gamma. \rho = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-3}{1} = -3 \quad \text{Γινόμενο 2 αριθμών αρνητικό} \rightarrow \text{Άρα ρίζες ετερόσημες}$$

$$\delta. s = y_1 + y_2 = 2x_1 - 3 + 2x_2 - 3 = 2(x_1 + x_2) - 6 = 2 \cdot 1 - 6 = -4$$

$$\rho = y_1 \cdot y_2 = (2x_1 - 3) \cdot (2x_2 - 3) = 4x_1 \cdot x_2 - 6(x_1 + x_2) + 9 = -12 - 6 + 9 = -9$$

Η εξίσωση που έχει ρίζες y_1, y_2 είναι: $x^2 - sx + p = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 9 = 0$

Σημείωση: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P} \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = S \cdot (x_1^2 + x_2^2 - P)$

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

← Παραγοντοποίηση τριωνύμου

12) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\text{i) } \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1} \quad \text{ii) } \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

ΛΥΣΗ

i) Αρχικά πέρνω περιορισμό $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

(Αν ήταν $x^2 + 1$ δεν θα χρειαζόταν διότι είναι πάντα θετικό)

$$\frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - \frac{1}{5}) \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{(x - \frac{1}{5})}{(x - 1)}$$

Το λύνω $5x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 16 + 20 = 36$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm 6}{10} = \begin{cases} \frac{6 - 4}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \\ \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2}{x - 2} = x - 2$$

13) Να παραγοντοποιήσετε (αν αυτό είναι δυνατόν) τα παρακάτω τριώνυμα :

$$\alpha) f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \beta) f(x) = 9x^2 - 6x + 1 \quad \gamma) f(x) = 5x^2 + 7x + 10$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Βρίσκω διακρίνουσα και ρίζες: $\Delta = 9 - 8 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{cases}$$

$$f(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-0,5)$$

$$\beta) f(x) = 9x^2 - 6x + 1$$

Βρίσκω διακρίνουσα και ρίζες: $\Delta = 36 - 36 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = 9 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\gamma) f(x) = 5x^2 + 7x + 10$$

$$\Delta = 49 - 50 = -1 < 0$$

Οπότε, δεν έχει ρίζες και έτσι δεν παραγοντοποιείται

Να θυμάμαι:

$\Delta > 0 \rightarrow$ 2 άνισες ρίζες

$\Delta = 0 \rightarrow$ Μια διπλή ρίζα

$\Delta < 0 \rightarrow$ Αδύνατο

→ Πότε θέτουμε όμως σε ένα τριώνυμο;

Όταν έχουμε ειδικές περιπτώσεις όπως : $x + \frac{1}{x}$ ή $|x|$ ή x^4 κ.ο.κ.

14) Να λυθεί η εξίσωση: $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$

ΛΥΣΗ

$2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$ Βάζω όπου $x^2 \rightarrow \omega$ οπότε $x^4 \rightarrow \omega^2$

$\Leftrightarrow 2\omega^2 + 7\omega + 3 = 0$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα:

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$$\omega_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \omega_2 = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

Επομένως, $x^2 = -\frac{1}{2}$ **ΑΔΥΝΑΤΟ**

ή

$x^2 = -\frac{1}{2}$ **ΑΔΥΝΑΤΟ**

15) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

ΛΥΣΗ

$x^2 + 2|x| - 35 = 0$

$\Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 35 = 0$ θέτουμε $|x| = \omega$ και θα έχουμε:

$\omega^2 + 2\omega - 35 = 0$

$\Delta = 4 + 4 \cdot 35 = 144$

$$\omega_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{-2+12}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{-2-12}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \end{cases}$$

Άρα, $\begin{cases} |x|=5 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=-5 \\ \text{ή} \\ |x|=-7 \Rightarrow \text{Αδύνατο} \end{cases}$

Περίπτωση προβλήματος με εις άτοπον απαγωγή

16) Έχουμε τις εξισώσεις $ax^2+bx+\gamma=0$ (1) και την $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (2) με $a\gamma \neq 0$.

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζας της εξίσωσης (1) τότε να δείξετε ότι: α) $\rho \neq 0$ και β) $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την (2)

ΛΥΣΗ

α) Όταν μου ζητάει να δείξω κάτι που δεν βγαίνει με πράξεις τότε θα παίρνω εις άτοπον απαγωγή. Έστω λοιπόν ότι $\rho=0$ επομένως η (1) $\rightarrow 0a+0b+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=0$ όπου σύμφωνα με την υπόθεση $\gamma \neq 0$

Αφού αν $a\gamma \neq 0$ τότε θα ισχύει :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ \text{και} \\ \gamma \neq 0 \end{array} \right.$$

β) Θα κάνω αντικατάσταση στην εξίσωση (2) όπου x το $\frac{1}{\rho}$ και θα έχω:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \rho^2 \cdot \frac{\gamma}{\rho^2} + \rho^2 \cdot \frac{\beta}{\rho} + \rho^2 \cdot \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \quad \text{όπου δείξαμε πως ισχύει από το προηγούμενο ερώτημα}$$

Περίπτωση προβλήματος με κατασκευή δευτεροβάθμιας εξίσωσης

17) Να κατασκευάσετε εξίσωση β βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς: $3-\sqrt{5}$ & $3+\sqrt{5}$

ΛΥΣΗ

Θα είναι της μορφής : $x^2 - sx + p = 0$

Θα βρω λοιπόν τα **S** (άθροισμα) και **P** (γινόμενο):

$$s = x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = (3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

Οπότε θα έχουμε : $x^2 - 6x + 4 = 0$

Απόδειξη τύποι του Vieta

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \cancel{\sqrt{\Delta}} - \beta - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta - \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2}$$
$$= \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

18) Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι **1ου βαθμού**.

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η εξίσωση 1ου βαθμού πρέπει $8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$

β) Για να έχει διπλή ρίζα θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μηδέν δηλ.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = [-2(\lambda - 2)]^2 - 4(8 - \lambda) = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 4(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Υπολογίζω την διακρίνουσα της διακρίνουσας $\Delta' = 9 + 16 = 25$ και

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

γ) Όπως είδαμε στο β' ερώτημα:

- Για την τιμή $\lambda_1 = 4$ το τριώνυμο γράφεται $(2x - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Για την τιμή $\lambda_2 = -1$ το τριώνυμο γράφεται $(3x + 1)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$\zeta. f(x) = |x-2| + \frac{3x}{|x+2|}$$

$$\beta. f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

$$\eta. f(x) = \sqrt[3]{x-1} - \frac{2}{\sqrt[4]{1-x}}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+4x+3}$$

$$\theta. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{2x+1}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{4-3x} + \frac{1}{x+1}$$

$$\iota. f(x) = \sqrt{|x+2|-3}$$

$$\epsilon. f(x) = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{16-x^2}$$

$$\iota\alpha. f(x) = \sqrt{|x+2|}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha. f(x) = x^2 + 4x + 4 \text{ πολυωνυμική άρα πεδίο ορισμού } A = \mathbb{R} \text{ (Σύνολο πραγματικών αριθμών)}$$

$$\beta. f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6} \text{ πρέπει } x^2-x-6 \neq 0 \text{ άρα Π.Ο.} = A = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+4x+3} \text{ πρέπει } x^2+4x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ και } x \neq -3$$

$$A = \mathbb{R} - \{-1, -3\}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{4-3x} + \frac{1}{x+1} \quad A = \{4-3x \geq 0, x \neq -1\} = \{x \leq \frac{4}{3}, x \neq -1\}$$

$$\epsilon. f(x) = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{16-x^2} \quad A = \{x^2-9 \geq 0, 16-x^2 \geq 0\} = \\ = \{(x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3) \text{ και } -4 \leq x \leq 4\}$$

$$\xleftarrow{-4 \quad -3 \quad 3 \quad 4} \text{ Άρα } A = \{-4 \leq x \leq -3 \text{ ή } 3 \leq x \leq 4\}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+3} \quad A = \{x \in \mathbb{R}, x^2+2x+3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \text{ ή } x \geq -1\}$$

$$\zeta. f(x) = |x-2| + \frac{3x}{|x+2|} \quad A = \{x \in \mathbb{R}, x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

η. $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ $A = \{x-1 \geq 0 \text{ και } 1-x > 0\} = \{x \geq 1 \text{ \& } x < -1\} = x \in (-1, +1)$

θ. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{2x+1}$ $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2+3x+2 \geq 0 \text{ και } 1+2x \neq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \text{ η } x \leq -2 \text{ και } x \neq -\frac{1}{2}\} = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty) - \{-\frac{1}{2}\}$

ι. $f(x) = \sqrt{|x+2|-3}$ $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+2|-3 \geq 0\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x+2 \leq -3 \text{ η } x+2 \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -5 \text{ η } x \geq 1\}$
 $= (-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$

ια. $f(x) = \sqrt{|x+2|}$ $A = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| \geq 0\} = \mathbb{R}$

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α.Ορισμός 1

Με τον όρο **πεδίο ορισμού** συνάρτησης εννοούμε το «ευρύτερο» υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ο $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού

- Ο συμβολισμός για το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι:
- ❖ $D(f)$ (D είναι το αρχικό γράμμα της λέξης Domain)
- ❖ D_f
- ❖ Με κεφαλαίο γράμμα A, B, Γ κ.λ.π

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΔΙΩΝ ΟΡΙΣΜΟΥ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όνομα	Τύπος	Πεδίο ορισμού
Πολυωνυμική	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}
Ομοπαράλληλική	$f(x) = ax + \beta$	\mathbb{R}
Σταθερή	$f(x) = c$	\mathbb{R}
Ταυτοτική	$f(x) = x$	\mathbb{R}
Ρητή	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $P(x), Q(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις του x .	$\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$
Ομογραφική	$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $\alpha \neq 0$ και $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$	$\mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$
Άρρητη	$f(x) = \sqrt{P(x)}$, ν άρτιος	$\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$
Λογαριθμική	$f(x) = \log_a h(x)$, $a > 0$ και $a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\}$
Τριγωνομετρικές	$f(x) = \eta \mu x$	\mathbb{R}
	$f(x) = \sigma \upsilon \nu x$	\mathbb{R}
	$f(x) = \epsilon \varphi x$	$\mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$
	$f(x) = \sigma \varphi x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$