«ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ»

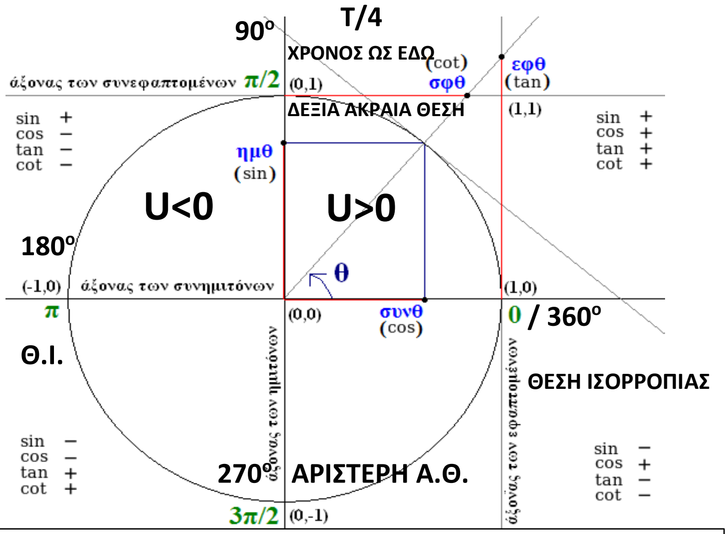
$f=\frac{N}{t}$ Η συχνότητα ταλάντωσης η οποία μετριέται σε Hz (Number / Time) **Είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων στην μονάδα του χρόνου**

$T=\frac{1}{f}$ Η περίοδος μιας ταλάντωσης είναι το αντίστροφο της συχνότητας μετρίεται σε sec **Ο χρόνος μια πλήρης ταλάντωσης δηλ. από +Α στο +Α ξανά**

$U=\frac{s}{t}=\frac{2\pi R}{T}$ (Η γραμμική ταχύτητα είναι το πηλίκο του διαστήματος που έκανε προς τον χρόνο) m/sec

$\omega=\frac{\varphi}{t}=\frac{2\pi}{T}$ ή $\omega=2\pi f$ (Η γωνιακή ταχύτητα είναι το πηλίκο της γωνίας που διένυσε προς τον χρόνο) rad/sec

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0



$X=A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$

Πλάτος **γωνιακή ταχύτητα** **αρχική φάση (Αν υπάρχει)**

<u>Ειδική περίπτωση</u>: Αν η φάση είναι π/2 τότε το ημίτονο γίνεται συνημίτονο και αντιστροφα

<u>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u> <u>σε περίπτωση που μου ζηταέι τον χρόνο t:</u>

$$\eta\mu x=\eta\mu\omega \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2\kappa\pi+\theta \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi+(\pi-\theta) \end{matrix}\right\}$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\theta$$

$U=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)=U_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o)=\omega x$ ή $U=\frac{dx}{dt}$ ρυθμός μεταβολής απομάκρυνσης (ή αλλιως παράγωγος της x)

$$-1\leq \eta\mu\omega\leq +1 \qquad -1\leq \sigma\upsilon\nu\omega\leq +1$$

Umax=ωΑ ➔ Μέγιστη ταχύτητα

$\alpha=-\omega^2A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)=\alpha_{max}$ $\eta\mu(\omega t+\varphi_o)=-\omega^2x$ ή $\alpha=\frac{du}{dt}$ ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (ή αλλιώς παράγωγος της u)

$\alpha_{max}=-\omega^2A$ ➔ Μέγιστη επιτάχυνση

(Μάζα πάντα σταθερή)

W=mg (weight=βάρος) σε Newton

$D=m\omega^2$ **(Σταθερά επαναφοράς)**

$\Sigma F=ma=-m\omega^2x=-Dx$ **Δύναμη ταλάντωσης**

<u>Συνιστάμενη Δύναμη</u>: ΣF=-DA

$K=\frac{1}{2}mu^2$ → ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ (Εξαρτάται από την ταχύτητα και την μάζα)

$U=\frac{1}{2}Dx^2$ → ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ (Εξαρτάται από την απομάκρυνση)

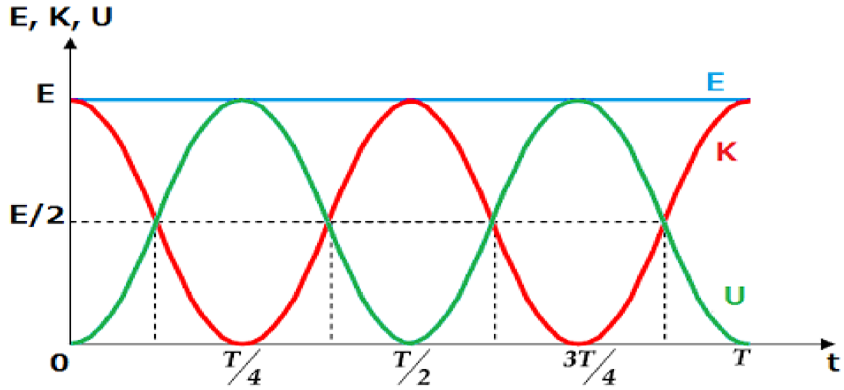
$E_{ολική}=U+K$ **(Σε joule)**

Συνολική ενέργεια

Αν U=K τότε ο τύπος γίνεται E=2U ή E=2K

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν <u>σε τυχαία θέση</u>, στις 2 ακραίες θα έχω: **E=Umax=** $\frac{1}{2}DA^2$ και στη θ.Ι. : **E=Kmax=** $\frac{1}{2}mu_{max}^2$

Α.Θ. (ημωt=1) **Θ.Ι.** (συνωt=1)



Η γραφική παράσταση της ενέργειας ταλάντωσης παρατηρούμε πως είναι η κινητική ενέργεια είναι συνημιτονοειδή μορφή (αφού εξαρτάται από την ταχύτητα) ενώ η δυναμική ενέργεια είναι ημιτονοειδής μορφή (αφου εξαρτάται από την απομάκρυνση) και φυσικά είμαστε στο θετικό πρώτο ημιάξονα αφού και οι 2 είναι εις το τετράγωνο.

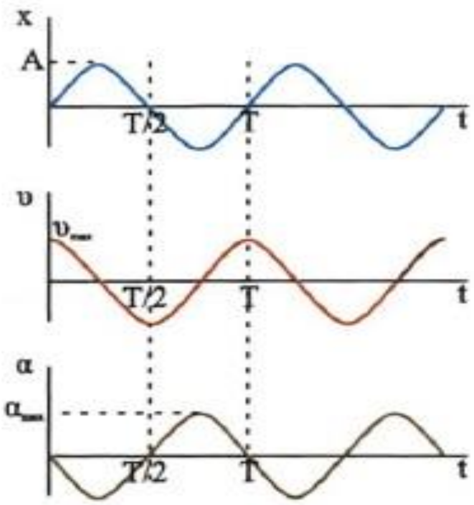
Να αποδείξετε τον χρήσιμο τύπο: $\mathbf{u^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1 (Τριγωνομετρικά)

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu^2(\omega t+\varphi_o) &= \left(\frac{X}{A}\right)^2 \\ \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_o) &= \left(\frac{U}{\omega A}\right)^2 \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{aligned} &\eta\mu^2(\omega t+\varphi_o)+\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi_o) \\ &=\left(\frac{X}{A}\right)^2+\left(\frac{U}{\omega A}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 1=\frac{X^2}{A^2}+\frac{U^2}{\omega^2 A^2} \\ &\Leftrightarrow U^2=\omega^2(A^2-X^2) \end{aligned}\right.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2 (Ενεργειακά)

$$E = K + U \Leftrightarrow \frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}Dx^2$$
$$\Leftrightarrow m\omega^2A^2=mu^2+m\omega^2x^2$$
$$\Leftrightarrow u^2 = \omega^2A^2 - \omega^2x^2$$
$$\Leftrightarrow u^2= \omega^2(A^2 - x^2)$$



<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΟΝΟ</u>

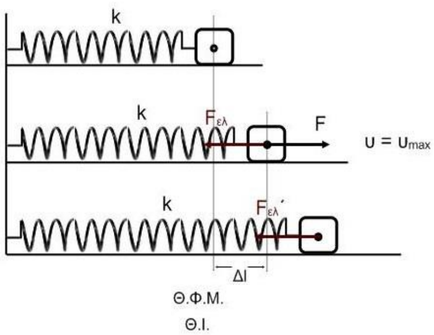
Στις ακραίες θέσεις έχω Α (δηλ. μέγιστο πλάτος και φυσικά μέγιστη δυναμική ενέργεια)

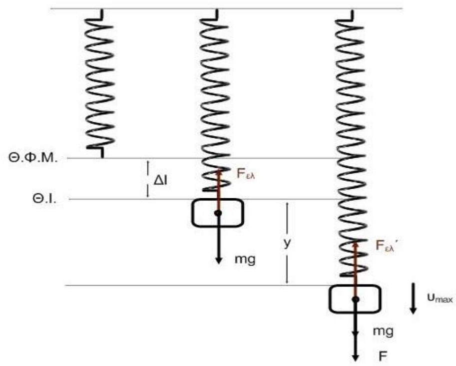
<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΟΝΟ</u>

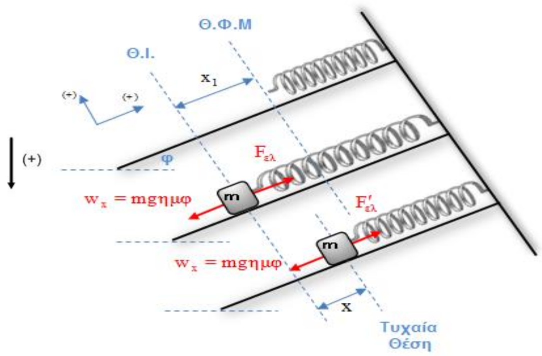
Στις ακραίες θέσεις έχω ωΑ (δηλ. μέγιστη ταχύτητα & φυσικά μέγιστη κινητική ενέργεια)

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΟΝΟ</u>

Πάει ανάποδα από απομάκρυνση διότι είναι ημιτονοειδής μορφή αλλά με μείον μπροστά

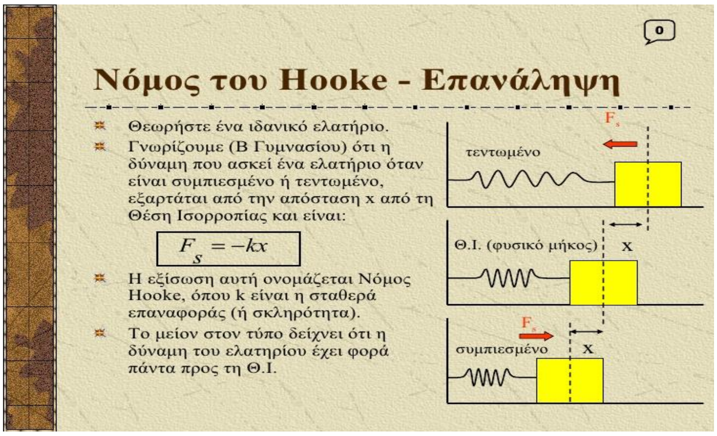


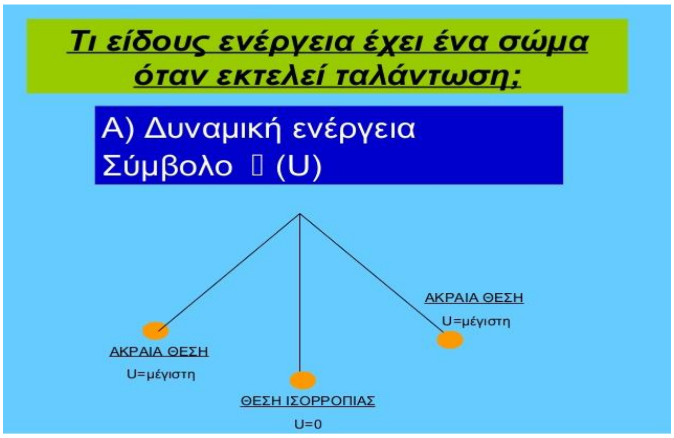




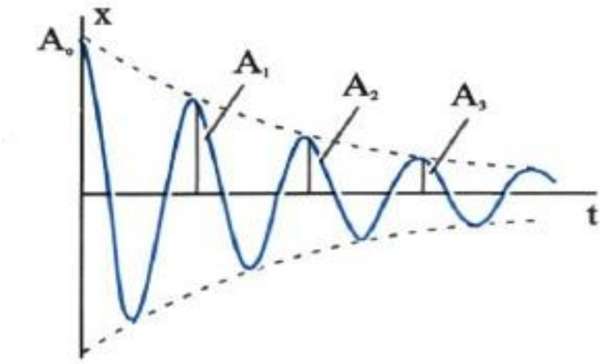
ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	**$F_{ελ}$=ΚΔL**	**$F_{ελ}$=W ⇔ ΚΔL=mg**	**$F_{ελ}$=W ⇔ ΚΔL=mgημθ**
ΤΥΧΑΙΑ ΘΕΣΗ	**$F_{ελ}$=Κ(ΔL+X)**	**ΣF=$F_{ελ}$'-W=ΚΔL+KX-mg=KX**	**ΣF=$F_{ελ}$'-W=ΚΔLημθ+KX-mg=KX**

(ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ) $\mathbf{T = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$, Αν έχω 2 ελατήρια τότε **D=K_1 + K_2** ενώ αν έχω 2 μάζες **m=m_1+ m_2**

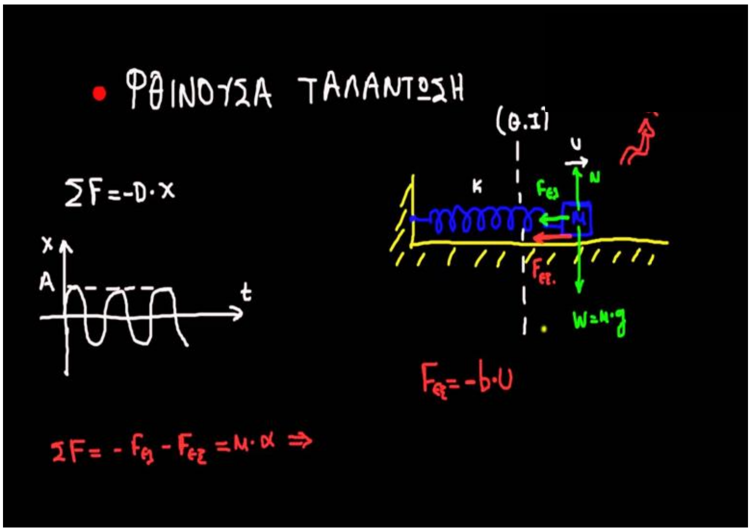




«ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ»



$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots.. = \sigma\tau\alpha\theta.$$



F = -bu (δύναμη απόσβεσης που σβήνει την ταλάντωση)

Είναι αντίθετη και ανάλογη της ταχύτητας (b $\rightarrow$ σταθερά απόσβεσης)

$A = A_0 e^{-\Lambda t}$ (τύπος πλάτους που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο)

$\Lambda = \frac{b}{2M}$ (Για σώμα δεμένο σε ελατήριο) Εκθέτης ταλάντωσης & πάντα σταθερό

$\frac{A_K}{A_{K+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda KT}}{A_0 e^{-\Lambda KT+1}} = e^{-\Lambda K}$ (πηλίκο διαδοχικών πλατών παραμένει σταθερό)

$E = \frac{1}{2} D A^2$ $= \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t}$ (Οπότε και η ενέργεια μειώνεται εκθετικά)

ΗΜΙΖΩΗ $T_{1/2} \rightarrow A = \frac{A_O}{2}$

$\frac{A_O}{2} = A_O \cdot e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t}$

$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow$ ln1-ln2=-Λt

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$ (ΑΦΟΥ ln1=0)

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (γενικά) ενω στην φθίνουσα **$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \Lambda^2}$**

Η **εκλυόμενη θερμότητα** είναι: $Q = E_{ΑΡΧ} - E_{ΤΕΛ} = \frac{1}{2} D A_O^2 - \frac{1}{2} D A^2 = W_{ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ}$ (ΕΡΓΟ)

ΙΣΧΥΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ $P = \frac{dw}{dt} = F \cdot u = -bu \cdot u = -bu^2$ (Ρυθμός έκλυσης θερμότητας)

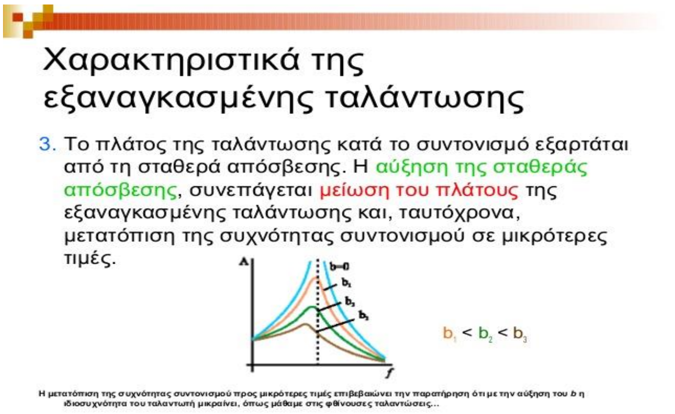
«ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ»

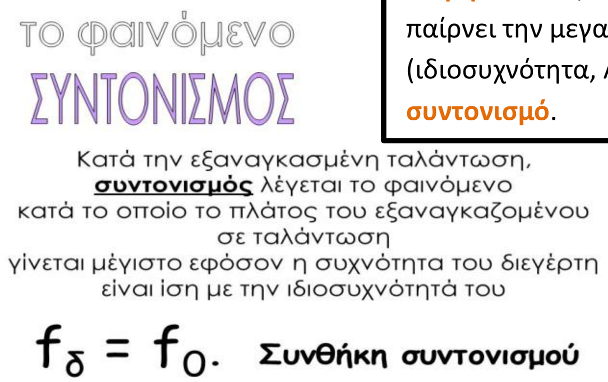
Είναι η ταλάντωση η οποία γίνεται με την επίδραση μιας διεγείρουσας δύναμης.

Διεργέτης είναι το σώμα που ασκεί την διεγείροσα δύναμη

Ταλαντωτής είναι το σώμα που εκτελεί την εξαναγκασμένη ταλάντωση

Στην αρχή το πλάτος (Α) αυξάνεται και μετά αρχίζει και μειώνεται και όταν η συχνότητα του διεργέτη ($f_δ$) γίνει πολύ μεγάλη το πλάτος θα **μηδενιστεί**, ενώ εκεί που παίρνει την μεγαλύτερη τιμή (ιδιοσυχνότητα, A_{max}) τότε έχω **συντονισμό**.





«ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ»

Σύνθεση 2 Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση. $\omega_1=\omega_2=\omega$	$X_1 = Αημωt$ & $X_2 = Αημ(ωt+φ)$ $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2συνφ}$ ➔**(Επέκταση Πυθαγορείου)** $εφθ=\dfrac{A_2ημφ}{A_1+A_2συνφ}$ • Αν φ=0 τότε $A=A_1+A_2$ • Αν φ=π τότε $A=\lvert A_1-A_2\rvert$ **Ειδική περίπτωση:** Αν έχουν και τα 2 αρχική φάση τότε παίρνουμε ΔΦ στους 2 τύπους.
Σύνθεση 2 Α.Α.Τ. της ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος & διαφορετικές συχνότητες $\omega_1 \neq \omega_2$ (Διακροτήματα) Π.χ. 100t, 102t	$X_1 = Αημω_1t$ & $X_2 = Αημω_2t$ $\mathbf{X_{ολικο} = X_1 + X_2}$ Προκύπτει με λίγη τριγωνομετρία ο κάτωθι τύπος: $x = 2Aσυν(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)ημ(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)$ $\text{ΝΕΟ ΠΛΑΤΟΣ} \rightarrow A' = 2Aσυν(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$ Το πλάτος παρατηρούμε ότι αυξομειώνεται ➔ Δεν είναι α.α.τ. Όταν $\omega_1 \approx \omega_2$ $f_{διακροτήματος} = \lvert f_1 - f_2\rvert$ $T_{διακροτήματος} = \dfrac{1}{\lvert f_1-f_2\rvert}$ $\omega_{ταλ} = \dfrac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$