

«ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ»

$f = \frac{N}{t}$ Η συχνότητα ταλάντωσης η οποία μετρείται σε Hz (Number / Time)

Είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων στην μονάδα του χρόνου

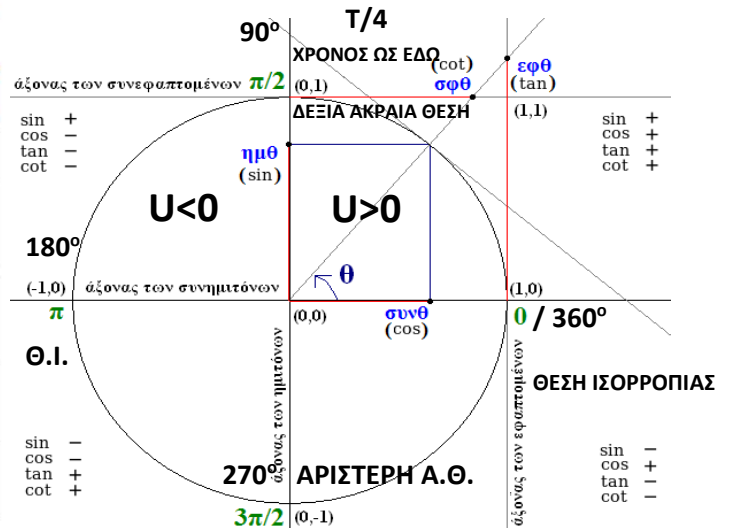
$T = \frac{1}{f}$ Η περίοδος μιας ταλάντωσης είναι το αντίστροφο της συχνότητας μετρείται σε sec

Ο χρόνος μια πλήρης ταλάντωσης δηλ. από +A στο +A ξανά

$U = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{T}$ (Η γραμμική ταχύτητα είναι το πηλίκο του διαστήματος που έκανε προς τον χρόνο) m/sec

$\omega = \frac{\phi}{t} = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 2\pi f$ (Η γωνιακή ταχύτητα είναι το πηλίκο της γωνίας που διένυσε προς τον χρόνο) rad/sec

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0



$x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0)$

Ειδική περίπτωση: Αν η φάση είναι $\pi/2$ τότε το ημίτονο γίνεται συνημίτονο και αντιστροφα

Πλάτος γωνιακή ταχύτητα αρχική φάση (Αν υπάρχει)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ σε περίπτωση που μου ζητάει τον χρόνο t:

$$\eta\mu x = \eta\mu \omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \omega \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta$$

$U = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) = U_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) = \omega x$ ή $U = \frac{dx}{dt}$ ρυθμός μεταβολής απομάκρυνσης (ή αλλιως παράγωγος της x)

$-1 \leq \eta\mu \omega \leq +1 \qquad -1 \leq \sigma\upsilon\nu \omega \leq +1$

$U_{\max} = \omega A \rightarrow$ Μέγιστη ταχύτητα

$\alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \phi_0) = \alpha_{\max} \eta\mu(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x$ ή $\alpha = \frac{du}{dt}$ ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (ή αλλιως παράγωγος της u)

$\alpha_{\max} = -\omega^2 A \rightarrow$ Μέγιστη επιτάχυνση

(Μάζα πάντα σταθερή)

$W = mg$ (weight=βάρος) σε Newton

$D = m\omega^2$ (Σταθερά επαναφοράς)

$\Sigma F = m\alpha = -m\omega^2 x = -Dx$ Δύναμη ταλάντωσης

Συνιστάμενη Δύναμη: $\Sigma F = -DA$

$K = \frac{1}{2} m u^2 \rightarrow$ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ
(Εξαρτάται από την ταχύτητα και την μάζα)

$U = \frac{1}{2} D x^2 \rightarrow$ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ
(Εξαρτάται από την απομάκρυνση)



$E_{\text{ολική}} = U + K$ (σε joule)

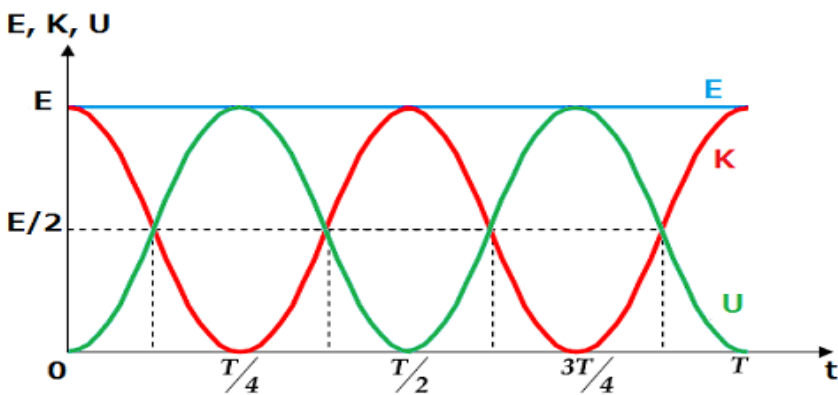
Συνολική ενέργεια

Αν $U=K$ τότε ο τύπος γίνεται $E=2U$ ή $E=2K$

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν σε τυχαία θέση, στις 2 ακραίες θα έχω: $E = U_{\max} = \frac{1}{2} DA^2$ και στη θ.λ.: $E = K_{\max} = \frac{1}{2} m u_{\max}^2$

Α.Θ. ($\eta\mu\omega t = 1$)

Θ.λ. ($\sigma\upsilon\nu\omega t = 1$)



Η γραφική παράσταση της ενέργειας ταλάντωσης παρατηρούμε πως είναι η κινητική ενέργεια είναι συνημιτονοειδή μορφή (αφού εξαρτάται από την ταχύτητα) ενώ η δυναμική ενέργεια είναι ημιτονοειδής μορφή (αφού εξαρτάται από την απομάκρυνση) και φυσικά είμαστε στο θετικό πρώτο ημιάξονα αφού και οι 2 είναι εις το τετράγωνο.

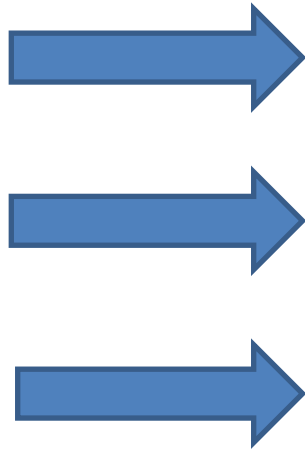
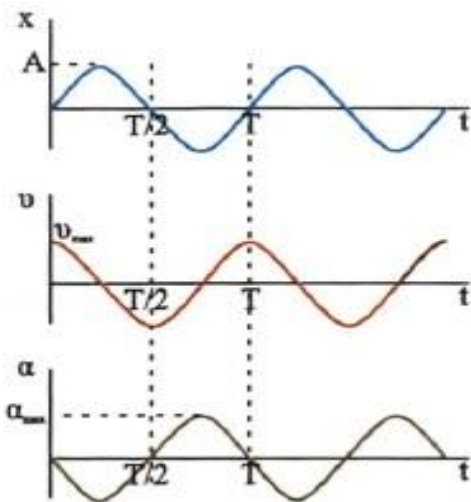
Να αποδείξετε τον χρήσιμο τύπο: $u^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1 (Τριγωνομετρικά)

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) &= \left(\frac{x}{A}\right)^2 \\ \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) &= \left(\frac{U}{\omega A}\right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{U}{\omega A}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{x^2}{A^2} + \frac{U^2}{\omega^2 A^2} \\ \Leftrightarrow U^2 &= \omega^2 (A^2 - x^2) \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2 (Ενεργειακά)

$$\begin{aligned} E = K + U &\Leftrightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} D x^2 \\ \Leftrightarrow m \omega^2 A^2 &= m u^2 + m \omega^2 x^2 \\ \Leftrightarrow u^2 &= \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \\ \Leftrightarrow u^2 &= \omega^2 (A^2 - x^2) \end{aligned}$$



ΕΙΣΩΣΗ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΟΝΟ

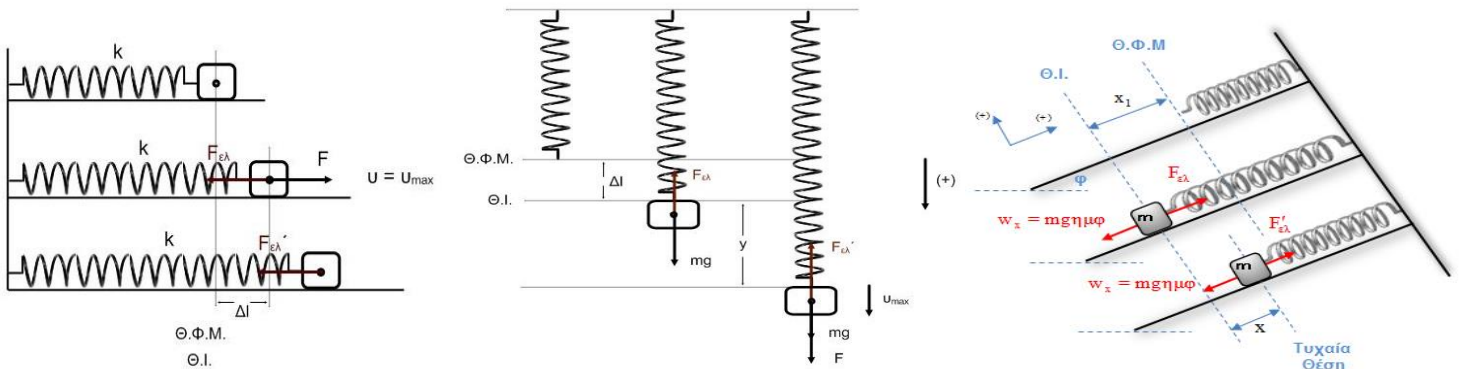
Στις ακραίες θέσεις έχω A (δηλ. μέγιστο πλάτος και φυσικά μέγιστη δυναμική ενέργεια)

ΕΙΣΩΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΟΝΟ

Στις ακραίες θέσεις έχω ωA (δηλ. μέγιστη ταχύτητα & φυσικά μέγιστη κινητική ενέργεια)

ΕΙΣΩΣΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΟΝΟ

Πάει ανάποδα από απομάκρυνση διότι είναι ημιτονοειδής μορφή αλλά με μείον μπροστά



ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	$F_{ελ} = K\Delta L$	$F_{ελ} = W \Leftrightarrow K\Delta L = mg$	$F_{ελ} = W \Leftrightarrow K\Delta L = mg\eta\mu\theta$
ΤΥΧΑΙΑ ΘΕΣΗ	$F_{ελ} = K(\Delta L + x)$	$\Sigma F = F_{ελ}' - W = K\Delta L + Kx - mg = Kx$	$\Sigma F = F_{ελ}' - W = K\Delta L\eta\mu\theta + Kx - mg = Kx$

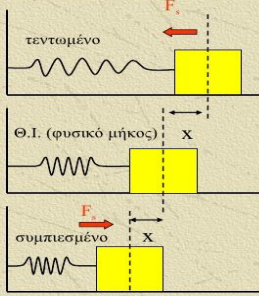
(ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$, Αν έχω 2 ελατήρια τότε $D = K_1 + K_2$ ενώ αν έχω 2 μάζες $m = m_1 + m_2$

Νόμος του Ηooke - Επανάληψη

- Θεωρήστε ένα ιδανικό ελατήριο.
- Γνωρίζουμε (B Γυμνασίου) ότι η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο όταν είναι συμπιεσμένο ή τεντωμένο, εξαρτάται από την απόσταση x από τη Θέση Ισορροπίας και είναι:

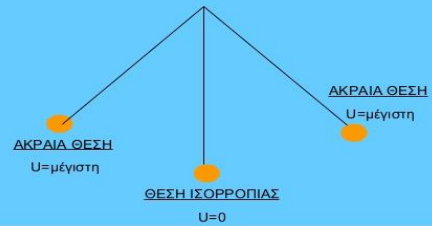
$$F_s = -kx$$

- Η εξίσωση αυτή ονομάζεται Νόμος Ηooke, όπου k είναι η σταθερά επαναφοράς (ή σκληρότητα).
- Το μείον στον τύπο δείχνει ότι η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά πάντα προς τη Θ.Ι.

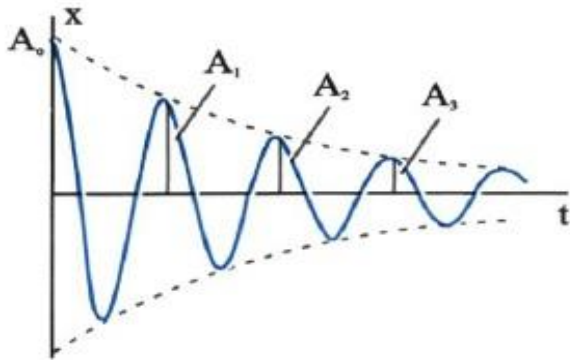


Τι είδους ενέργεια έχει ένα σώμα όταν εκτελεί ταλάντωση;

A) Δυναμική ενέργεια
Σύμβολο U



«ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ»



$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \text{σταθ.}$$

• ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

$\Sigma F = -D \cdot x$

$\Sigma F = -F_{\theta} - F_{\epsilon} = \mu \cdot a \Rightarrow$

$F_{\epsilon} = -b \cdot v$

(θ, \dot{x})

$F_{\theta} = kx$

$F_g = mg$

$W = \mu \cdot g$

$F = -bu$ (δύναμη απόσβεσης που σβήνει την ταλάντωση)

Είναι αντίθετη και ανάλογη της ταχύτητας ($b \rightarrow$ σταθερά απόσβεσης)

$A = A_0 e^{-\Lambda t}$ (τύπος πλάτους που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο)

$\Lambda = \frac{b}{2M}$ (Για σώμα δεμένο σε ελατήριο) Εκθέτης ταλάντωσης & πάντα σταθερό

$\frac{A_K}{A_{K+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda K T}}{A_0 e^{-\Lambda (K+1) T}} = e^{-\Lambda T}$ (πηλίκιο διαδοχικών πλατών παραμένει σταθερό)

$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t}$ (Οπότε και η ενέργεια μειώνεται εκθετικά)

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (γενικά) ενώ στην φθίνουσα $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \Lambda^2}$

Η εκλυόμενη θερμότητα είναι: $Q = E_{\text{ΑΡΧ}} - E_{\text{ΤΕΛ}} = \frac{1}{2} D A_0^2 - \frac{1}{2} D A^2 = W_{\text{ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ}}$ (ΕΡΓΟ)

ΙΣΧΥΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ $P = \frac{dw}{dt} = F \cdot u = -bu \cdot u = -bu^2$ (Ρυθμός έκλυσης θερμότητας)

ΗΜΙΖΩΗ $T_{1/2} \rightarrow A = \frac{A_0}{2}$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda} \quad (\text{ΑΦΟΥ } \ln 1 = 0)$$

«ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ»

Είναι η ταλάντωση η οποία γίνεται με την επίδραση μιας διεγείρουσας δύναμης.

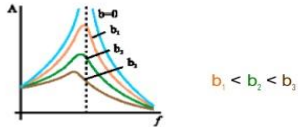
Διεργέτης είναι το σώμα που ασκεί την διεγείροσα δύναμη

Ταλαντωτής είναι το σώμα που εκτελεί την εξαναγκασμένη ταλάντωση

Στην αρχή το πλάτος (A) αυξάνεται και μετά αρχίζει και μειώνεται και όταν η συχνότητα του διεργέτη (f_δ) γίνει πολύ μεγάλη το πλάτος θα **μηδενιστεί**, ενώ εκεί που παίρνει την μεγαλύτερη τιμή (ιδιοσυχνότητα, A_{max}) τότε έχω **συντονισμό**.

Χαρακτηριστικά της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

3. Το πλάτος της ταλάντωσης κατά το συντονισμό εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης. Η **αύξηση της σταθεράς απόσβεσης**, συνεπάγεται **μείωση του πλάτους** της εξαναγκασμένης ταλάντωσης και, ταυτόχρονα, μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού σε μικρότερες τιμές.



Η μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού προς μικρότερες τιμές επιβεβαιώνει την παρατήρηση ότι με την αύξηση του b η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή μικραίνει, όπως βλέπουμε στις φθίνουσες ταλαντώσεις...

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Κατά την εξαναγκασμένη ταλάντωση, **συντονισμός** λέγεται το φαινόμενο κατά το οποίο το πλάτος του εξαναγκαζομένου σε ταλάντωση γίνεται μέγιστο εφόσον η συχνότητα του διεργέτη είναι ίση με την ιδιοσυχνότητά του

$$f_\delta = f_0. \quad \text{Συνθήκη συντονισμού}$$

«ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ»

Σύνθεση 2 Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$X_1 = A_1 \eta \mu \omega t \quad \& \quad X_2 = A_2 \eta \mu(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \sin \phi} \quad \rightarrow \text{(Επέκταση Πυθαγορείου)}$$

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{A_2 \eta \mu \phi}{A_1 + A_2 \sin \phi} \quad \begin{array}{l} \bullet \text{ Αν } \phi = 0 \text{ τότε } A = A_1 + A_2 \\ \bullet \text{ Αν } \phi = \pi \text{ τότε } A = |A_1 - A_2| \end{array}$$

Ειδική περίπτωση: Αν έχουν και τα 2 αρχική φάση τότε παίρνουμε $\Delta\Phi$ στους 2 τύπους.

$$X_1 = A_1 \eta \mu \omega_1 t \quad \& \quad X_2 = A_2 \eta \mu \omega_2 t \quad X_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = X_1 + X_2$$

Σύνθεση 2 Α.Α.Τ. της ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος & διαφορετικές συχνότητες

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

(Διακροτήματα)

Π.χ. 100t, 102t

Προκύπτει με λίγη τριγωνομετρία ο κάτωθι τύπος:

$$x = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \eta \mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

$$\text{ΝΕΟ ΠΛΑΤΟΣ} \rightarrow A' = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Το πλάτος παρατηρούμε ότι αυξομειώνεται \rightarrow Δεν είναι α.α.τ.

$$\text{Όταν } \omega_1 \square \omega_2 \quad f_{\text{διακροτήματος}} = |f_1 - f_2| \quad T_{\text{διακροτήματος}} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad \omega_{\text{ταλ}} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$$